Tercer Parcial Miguel Guzman

Pregunta (1)

Tipo A

Sea la funcion $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

Dominio Todo R menos 1

Corte $(0,0)$ Unico punto de corte

No es par no es impar. Recuerde que PAR f(x)=f(-x) IMPAR f(x)=-f(-x)

Puntos Criticos, Primera Derivada $\dfrac{d}{dx}f(x) \text{ simplify } \rightarrow -\dfrac{2\cdot x}{(x-1)^3}$

Unico Punto Critico $x = 0$

Intervalo de Crecimiento y Decrecimiento

Crece en $(0,1)$ Decrece en $(-\infty,0)$ y $(1,\infty)$

Puntos de Inflexion. Segunda Derivada $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) \text{ simplify } \rightarrow \dfrac{2\cdot(2\cdot x+1)}{(x-1)^4}$

Unico Punto de Inflexion $x = \dfrac{-1}{2}$

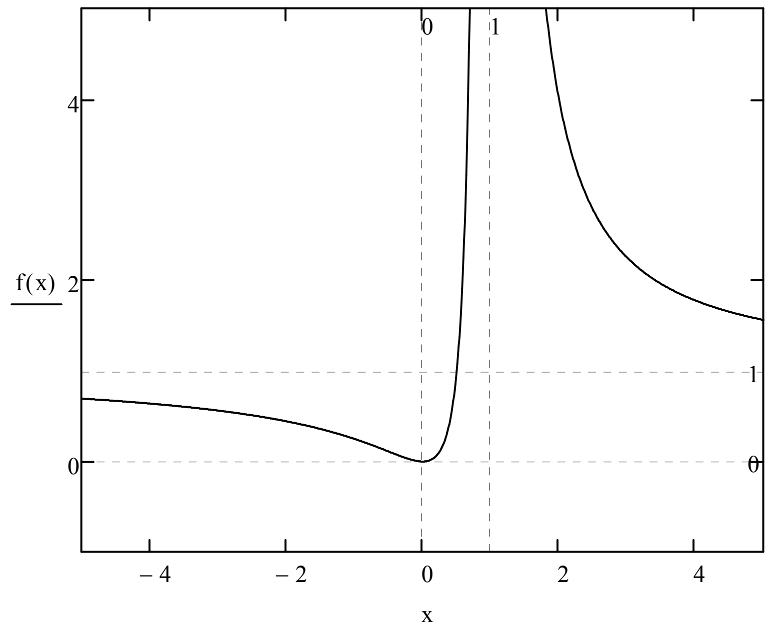
Es concava Arriba (Concava) en $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)$ Convexa (Abajo) en $\left(\dfrac{-1}{2},\infty\right)$

Asintotas $\lim_{x \to 1^+} f(x) \rightarrow \infty$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) \rightarrow \infty$ $x = 1$ es AV

$\lim_{x \to \infty} f(x) \rightarrow 1$ $y = 1$ es AH

Clasificar los puntos criticos En este caso $x = 0$ es un minimo local.

Grafica



TIPO B

Sea la funcion $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

Dominio Todo R menos 3

Corte $(0,0)$ Unico punto de corte

No es par no es impar. Recuerde que PAR f(x)=f(-x) IMPAR f(x)=-f(-x)

Puntos Criticos, Primera Derivada $\dfrac{d}{dx}f(x) \text{ simplify } \rightarrow -\dfrac{6\cdot x}{(x-3)^3}$

Unico Punto Critico $x = 0$

Intervalo de Crecimiento y Decrecimiento

Crece en $(0,3)$ Decrece en $(-\infty,0)$ y $(3,\infty)$

Puntos de Inflexion. Segunda Derivada $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) \text{ simplify } \rightarrow \dfrac{6\cdot(2\cdot x+3)}{(x-3)^4}$

Unico Punto de Inflexion $x = \dfrac{-3}{2}$

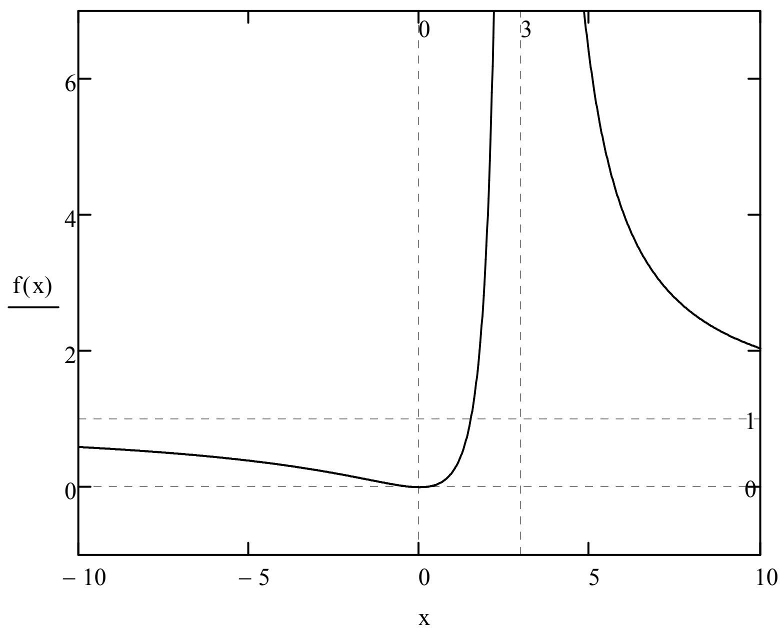
Es concava Arriba (Concava) en $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$ Convexa (Abajo) en $\left(\frac{-3}{2}, \infty\right)$

Asintotas $\lim_{x \to 3^+} f(x) \to \infty$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) \to \infty$ $x = 3$ es AV

$\lim_{x \to \infty} f(x) \to 1$ $y = 1$ es AH

Clasificar los puntos criticos En este caso $x = 0$ es un minimo local.

Grafica



Pregunta (2)

Tipo A

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\pi - 3 \cdot \text{acos}\left(\frac{x}{2}\right)}{x - 1} \right) \to \sqrt{3}$$

Recordemos aplicar L'Hopital porque en primer limite da la indeterminacion 0/0, entonces

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\pi - 3\,\text{acos}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left[\frac{d}{dx}(x - 1)\right]} \text{ simplify } \to \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Por lo que $\lim_{x \to 1} \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} \to \sqrt{3}$

Tipo B

Recordemos aplicar L'Hopital porque en primer limite da la indeterminacion 0/0, entonces

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\pi - 6\cdot \operatorname{asin}\left(\frac{x}{2}\right)}{x - 1} \right) \to -2\cdot\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\pi - 6\operatorname{asin}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left[\frac{d}{dx}(x-1)\right]} \text{ simplify } \to -\frac{6}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Por lo que $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{-6}{\sqrt{4 - x^2}} \to -2\cdot\sqrt{3}$

Pregunta (3)

Tipo A

Sea $f(x) := \sqrt{4x^2 + \sin(\pi x)^2}$ $\qquad f\left(\frac{1}{4}\right) \to \frac{\sqrt{3}}{2}$

Se sabe que $f^{-1}(f(x)) = x$ Por lo que $\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(f(x))\right]\cdot\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = 1$

Entonces $\displaystyle \frac{d}{dx}\left[f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)}$ donde

$$g(x) := \frac{d}{dx}f(x) \text{ simplify } \to \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4\cdot x + \frac{\pi\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot x)}{2}\right)}{\sqrt{8\cdot x^2 + 2\cdot\sin(\pi\cdot x)^2}} \qquad g\left(\frac{1}{4}\right) \text{ simplify } \to \frac{\sqrt{3}\cdot(\pi+2)}{3}$$

Se finaliza $\displaystyle \frac{d}{dx}\left[f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] := \frac{1}{g\left(\frac{1}{4}\right)} \text{ simplify } \to \frac{\sqrt{3}}{\pi + 2}$

Tipo B

Sea $f(x) := \sqrt{9x^2 + \sin(\pi x)^2}$ $\qquad f\left(\frac{1}{3}\right) \to \frac{\sqrt{7}}{2}$

Se sabe que $f^{-1}(f(x)) = x$ Por lo que $\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(f(x))\right]\cdot\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = 1$

Entonces $\displaystyle \frac{d}{dx}\left[f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[f^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)}$ donde

$$g(x) := \frac{d}{dx}f(x) \text{ simplify } \rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot\left(9\cdot x + \frac{\pi\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot x)}{2}\right)}{\sqrt{18\cdot x^2 + 2\cdot\sin(\pi\cdot x)^2}} \qquad g\left(\frac{1}{3}\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{\sqrt{7}\cdot\left(\pi\cdot\sqrt{3} + 12\right)}{14}$$

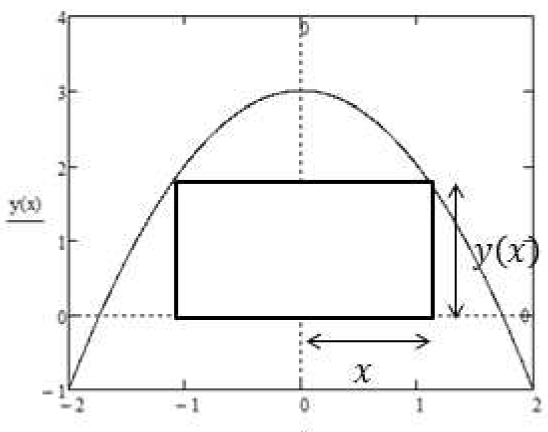
Se finaliza $\frac{d}{dx}\left[f^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right] := \frac{1}{g\left(\frac{1}{3}\right)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{21}}{3\cdot\left(\pi + 4\cdot\sqrt{3}\right)}$

Pregunta (4)

Tipo A

Leyendo bien el enunciado se sabe que el RECTANGULO corta en el eje X y los otros vertices en la parabola de ecuacion dada, mas alla nos dice que solo la parte positiva

$$y(x) := 3 - x^2$$



Luego el area del rectangulo sera

$$A(x) := 2x\cdot y(x) \rightarrow -2\cdot x\cdot\left(x^2 - 3\right)$$

Buscamo el maximo de la funcion, primera derivada

$\frac{d}{dx}A(x) \rightarrow 6 - 6\cdot x^2$ Implica que

$x_1 := 1$ $\qquad x_2 := -1$

Donde se descarta la solucion negativa por ser longitud el problema

Buscamos la segunda derivada para garantizar que sea maximo

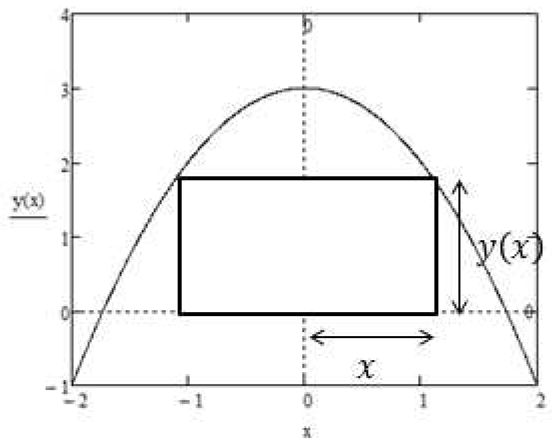
$\frac{d^2}{dx^2}A(x) \rightarrow -12\cdot x$ Para $x_1 = 1$ Se cumple el maximo Se tendra que

$y(1) = 2$ implica $A(1) = 4$

Tipo B

Leyendo bien el enunciado se sabe que el RECTANGULO corta en el eje X y los otros vertices en la parabola de ecuacion dada, mas alla nos dice que solo la parte positiva

$y(x) := 5 - x^2$



Luego el area del rectangulo sera

$A(x) := 2x \cdot y(x) \rightarrow -2 \cdot x \cdot \left(x^2 - 5\right)$

Buscamo el maximo de la funcion, primera derivada

$\frac{d}{dx}A(x) \rightarrow 10 - 6 \cdot x^2$ Implica que

$x_1 := \sqrt{\frac{5}{3}}$ $x_2 := -\sqrt{\frac{5}{3}}$

Donde se descarta la solucion negativa por ser longitud el problema

Buscamos la segunda derivada para garantizar que sea maximo

$\frac{d^2}{dx^2}A(x) \rightarrow -12 \cdot x$ Para $x_1 \rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{3}$ Se cumple el maximo Se tendra que

$y\left(x_1\right) \rightarrow \frac{10}{3}$ implica $A\left(x_1\right)$ simplify $\rightarrow \frac{20 \cdot \sqrt{15}}{9}$